

1. Линейные отображения (операторы). Действия с ними и их матрицы, эквивалентность матриц. Выражение координат образа вектора через матрицу линейного отображения и координаты векторов. Изменение матрицы линейного отображения при изменении базисов. Ядро, образ, ранг, дефект линейного отображения. Множество линейных отображений как линейное пространство, изоморфное пространству матриц. Кольцо линейных преобразований. Изменение матрицы линейного преобразования при изменении базиса. Подобие матриц. Многочлены от преобразований. Инвариантные подпространства. Собственные векторы и числа. Характеристический многочлен линейного преобразования. Выражение коэффициентов характеристического многочлена через главные миноры матрицы. Матрица Фробениуса. Теорема о существовании собственного вектора над полем комплексных чисел. Ее вещественный аналог. Алгебраическая и геометрическая кратности собственного числа. Критерий диагоналируемости линейного преобразования. Аннулирующий многочлен. Минимальный многочлен. Его существование. Описание множества всех аннулирующих многочленов. Свойства минимального многочлена. Метод Крылова построения минимального многочлена. Теорема Гамильтона-Кэли. Жорданова форма линейного преобразования. Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств. Схема построения Жорданова базиса. Доказательство ее корректности. Единственность Жордановой формы.

2. Билинейные и полуторалинейные функции и их матрицы. Действия с ними. Выражение функции через координаты векторов. Изменение матрицы билинейной и полуторалинейной функции при изменении базиса. Конгруэнтные матрицы. Связь билинейных и квадратичных функций (комплексный и вещественный случай). Теорема Лагранжа о приведении симметричной билинейной и полуторалинейной функции к каноническому и нормальному видам. Теорема Якоби о приведении симметричной билинейной и полуторалинейной функции к каноническому виду. Приведение квадратичной формы к нормальному виду. Закон инерции. Знакоопределенные симметричные билинейные и полуторалинейные функции. Критерий Сильвестра положительной определенности. Связь со скалярным произведением. Объем k -мерного параллелепипеда в n -ом пространстве. Расстояние между множествами векторов унитарного пространства. Нахождение расстояния между линейными многообразиями. «Решение» несовместных систем линейных уравнений. Нормальное псевдорешение. Оценка Адамара, ее достижимость в вещественном и комплексном случаях.

3. Алгебраическая поверхность и ее порядок. Уравнение квадрики, его изменение при аффинном преобразовании. Центр квадрики. Конические квадрики, их пересечение с гиперплоскостью. Цилиндрические квадрики. Приведение уравнения квадрики к каноническому виду аффинным преобразованием. Аффинные инварианты. Аффинная классификация кривых 2-го порядка. Аффинная классификация поверхностей 2-го порядка. Пересечение квадрики и прямой. Асимптотические направления. Прямые на поверхностях 2-го порядка.

4. Связь линейных преобразований и билинейных функций в унитарном пространстве. Сопряженное преобразование, его существование и единственность. Нормальное преобразование унитарного пространства, существование у него ортонормированного базиса из собственных векторов. Группа унитарных (ортогональных) преобразований. Геометрический смысл ортогональных преобразований. Самосопряженные (симметричные) преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.

5. Приведение уравнения квадрики к каноническому виду ортогональным преобразованием. Ортогональные инварианты и полуинварианты. Ортогональная классификация кривых 2-го порядка. Ортогональная классификация поверхностей 2-го порядка. Поверхности вращения.

6. Кольцо формальных степенных рядов, кольцо многочленов. Теорема о правом (левом) делении многочленов (с коэффициентами из возможно некоммутативного кольца) с остатком, обобщенная теорема Безу, схема Горнера. Кольцо $F[x]$ многочленов с коэффициентами из поля F . Алгоритм Евклида и линейное представление НОД многочленов. Три утверждения о взаимно-простых многочленах. Теорема о разложении многочлена в произведение неприводимых множителей, неприводимые многочлены над полями: комплексных, вещественных и рациональных чисел. Формулы Виета. Целые и рациональные корни целочисленных многочленов. Характеристика поля, ее свойства. Теорема о числе элементов конечного поля. Производная многочлена, выделение кратных множителей.

7. Группа, подгруппа. Циклическая группа. Теорема о подгруппах циклической группы. Круговые многочлены. Разбиение группы на смежные классы по подгруппе, теорема Лагранжа. Фактормножество, факторгруппа. Нормальные делители и их связь с гомоморфизмами групп.